Załącznik nr 1/1
do Zarządzenia Rektora PG nr 5/2015 z 10 lutego 2015 r.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI, TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Imię i nazwisko autora rozprawy: Krzysztof Turowski
Dyscyplina naukowa: Informatyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Analiza właściwości algorytmicznych problemu szkieletowego kolorowania grafów

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Analysis of algorithmic properties of the backbone graph coloring problem

Promotor *podpis*	Drugi promotor *podpis*
Prof. dr hab. inż. Marek Kubale	
Promotor pomocniczy *podpis*	Kopromotor *podpis*
Dr inż. Robert Janczewski	

Gdańsk, rok 2015

Streszczenie

W niniejszej pracy badany jest problem szkieletowego kolorowania grafów, wywodzący się z zagadnienia przydziału częstotliwości w sieciach radiowych.

Grafy często są wykorzystywane do modelowania topologii sieci telekomunikacyjnych. W modelach tych stacjom bazowym odpowiadają wierzchołki grafów, natomiast ograniczenia nałożone na sygnały są przedstawiane jako krawędzie grafu, łączące te pary wierzchołków, dla których emitowane sygnały mogą się wzajemnie zakłócać. Typowo, problem przypisania pasm częstotliwości w sieci można zamodelować jako zagadnienie kolorowania grafów, w którym pasma częstotliwości są reprezentowane przez poszczególne kolory. Dokładna definicja podobieństwa pasm częstotliwości może się różnić w zależności od typu sygnału czy rodzaju przesyłanej informacji, skutkując różnymi sformułowaniami problemu. Przykładowo, w większości przypadków nie należy zakładać, że sąsiednie wierzchołki nie mogą otrzymać jedynie identycznych kolorów, ale raczej kolory im przydzielone powinny być oddzielone o zadany przedział. Podejściem, które spełnia ten warunek i jednocześnie uogólnia szereg znanych w literaturze modeli jest kolorowanie szkieletowe, które, choć sformułowane niedawno, zdobyło już pewne zainteresowanie w teorii grafów.

W pracy wyróżnić można kilka podstawowych wątków. Po pierwsze, podana jest ogólna asymptotyczna charakteryzacja zachowania szkieletowej liczby chromatycznej dla zadanych grafów z ustalonymi szkieletami. Dowiedziono, że jej wartość rośnie proporcjonalnie do wartości parametru λ, będącego szkieletową odległością kolorów, oraz do liczby chromatycznej szkieletu. Co więcej, ponieważ problem obliczania szkieletowej liczby chromatycznej jest $\mathcal{NP}$-trudny w przypadku ogólnym, badane są ograniczenia i złożoność obliczeniowa tego zagadnienia dla wyróżnionych klas grafów i szkieletów: grafów pełnych ze szkieletem dwudzielnym, grafów planarnych, grafów o ograniczonym stopniu oraz split grafów. W każdym z przypadków podany został działający w czasie wielomianowym algorytm dokładny (o ile istnieje) lub przybliżony dla wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej.

Abstract

In this thesis we study the backbone coloring, originating from the efficient frequency assignment problem in radio networks.

Graphs are frequently used to model topology of the radio networks, representing the base stations with vertices of the graphs. The restrictions on the signal interferences can be represented using edges of the graph, each adjacent to vertices whose respective transmitters' signals are prone to distort one another. The assignment can be modelled as the graph coloring, with frequency channels represented by colors. The exact notion of similarity of frequency channels may vary, resulting in different types of coloring problems. For instance, in most cases it is not possible to assume that the adjacent vertices cannot be assigned the same color, but they have to be separated by a given margin. The approach which fits this constraint and unifies several well-known models, known as backbone coloring, has recently emerged and gained relatively substantial interest among graph theorists.

There are few major threads of this thesis. First, we give the general asymptotic characterization of the backbone chromatic number for given graphs with given backbones. We prove that it grows proportionally to the value of parameter λ and the chromatic number of the backbone graph. Furthermore, as the problem of computing the backbone chromatic number is $\mathcal{NP}$-hard in general, we investigate the bounds and the complexity of this problem for special classes of graphs and backbones: complete graphs with bipartite backbones, planar graphs, graphs with bounded degree and split graphs. In each case we construct an exact (if possible) or an approximate polynomial-time algorithm for computing the backbone chromatic number.

Wykaz oznaczeń

$\emptyset$	zbiór pusty
$x \in X$	x jest elementem zbioru X
$X \subseteq Y$	X jest podzbiorem Y
$X \subset Y$	X jest podzbiorem właściwym Y
$X \cap Y$	iloczyn zbiorów X i Y
$X \cup Y$	suma zbiorów X i Y
$X \setminus Y$	różnica zbiorów X i Y
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_+$	zbiór liczb naturalnych dodatnich
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\min A$	najmniejszy element niepustego, skończonego zbioru $A \subset \mathbb{Z}$
$\max A$	największy element niepustego, skończonego zbioru $A \subset \mathbb{Z}$
$x := y$	x jest równe z definicji y
$f \colon X \to Y$	f jest funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y
$\lceil x \rceil$	najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x
$\lfloor x \rfloor$	największa liczba całkowita nie większa niż x
$G \subseteq H$	G jest podgrafem H
$G[A]$	podgraf indukowany grafu G na niepustym zbiorze $A \subseteq V(G)$
$G \cap H$	część wspólna grafów G i H

$G \cup H$	suma grafów G i H
$G \setminus H$	różnica grafów G i H
$\bar{G}$	dopełnienie grafu G
$V(G)$	zbiór wierzchołków grafu G
$E(G)$	zbiór krawędzi grafu G
$N_G(v)$	sąsiedztwo wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G
N_n	n-wierzchołkowy graf pełny
K_n	n-wierzchołkowy graf pełny
C_n	n-wierzchołkowy cykl
P_n	n-wierzchołkowa ścieżka
$n(G)$	rząd grafu G
$m(G)$	rozmiar grafu G
$\deg_G(v)$	stopień wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G
$\mathrm{indeg}_G(v)$	stopień wejściowy wierzchołka $v \in V(G)$ w digrafie G
$\mathrm{outdeg}_G(v)$	stopień wyjściowy wierzchołka $v \in V(G)$ w digrafie G
$\Delta(v)$	stopień grafu G
$\omega(v)$	liczba klikowa grafu G
$\chi(v)$	liczba chromatyczna grafu G
$BBC_\lambda(G, H)$	λ-szkieletowa liczba chromatyczna grafu G ze szkieletem H
$O(f)$	zbiór funkcji rosnących nie szybciej niż f
$\mathcal{P}$	klasa problemów decyzyjnych rozstrzygalnych przez algorytmy wielomianowe
$\mathcal{NP}$	klasa problemów decyzyjnych rozstrzygalnych przez wielomianowe algorytmy niedeterministyczne
$\mathcal{NPC}$	klasa problemów zupełnych w klasie $\mathcal{NP}$ ze względu na redukcje wielomianowe

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1. Założenia i cele pracy

Zagadnienie przydziału częstotliwości dla sieci telekomunikacyjnych, w szczególności w sieciach radiowych, jest problemem, w modelowaniu którego często wykorzystywane są narzędzia teoriografowe. Naturalnym sposobem przedstawienie topologii zadanej sieci radiowej i wzajemnych zależności między stacjami bazowymi jest odwzorowanie przekaźników na wierzchołki grafu, natomiast możliwych interferencji między stacjami na jego krawędzie. Zazwyczaj dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą, gdy odpowiednie przekaźniki mają dostatecznie dużą moc i znajdują się w niewielkiej odległości od siebie, zatem prawdopodobne jest ich wzajemne zakłócanie, w przypadku gdy zostaną im przydzielone zbliżone pasma częstotliwości. Częstym kryterium optymalizacji jest minimalizacja szerokości pasma potrzebnego do prawidłowego funkcjonowania wszystkich przekaźników przy jednoczesnym zapewnieniu akceptowalnego poziomu interferencji.

Jak widać, szczegółowe kryteria określające problem są ściśle związane z różnymi sposobami zdefiniowania pasma częstotliwości, określenia „podobieństwa" między poszczególnymi pasmami, a także poziomu interferencji i kryteriów jego dopuszczalnej akceptowalności. Prekursorską w tej dziedzinie była praca Metzgera [36] opublikowana na początku lat 70. ubiegłego wieku. Jednak dopiero prace Hale'a [25] oraz Cozzensa i Robertsa [16] rozpoczęły na dobre dynamiczny rozwój dziedziny, który zaowocował wieloma nowymi modelami. Na przestrzeni ostatnich lat stosunkowo duże zainteresowanie wzbudził model kolorowania szkieletowego, wprowadzony przez Broersmę i in. w [7], w ramach którego możliwe stało się uogólnienie wyników znanych z szeregu innych modeli, np. $L(2,1)$-kolorowania oraz kolorowania radiowego [6].

Celem pracy jest przedstawienie na tle dotychczasowych rezultatów z dziedziny szkieletowego kolorowania grafów zagadnień i problemów, do których rozwiązania przyczynił się autor niniejszej pracy. Zaprezentowane wyniki umożliwią nam uzasadnienie poniższego stwierdzenia, stanowiącego podstawową tezę niniejszej pracy:

> Zagadnienie szkieletowego kolorowania grafów jest działem chromatycznej teorii grafów, w ramach którego znalezienie optymalnych parametrów grafów lub przynajmniej ich dobrych oszacowań jest w ogólnym przypadku $\mathcal{NP}$-trudne. Co więcej, problem wyznaczenia szkieletowej liczby chromatycznej pozostaje $\mathcal{NP}$-trudny dla grafów stopnia 4 oraz grafów planarnych, nawet w przypadku, gdy szkielet jest spójny, a także dla grafów stopnia 5, gdy szkielet jest drzewem.
>
> W przypadku grafów podkubicznych, kaktusów oraz split grafów ze skojarzeniem w szkielecie istnieją jednak wielomianowe algorytmy wyznaczające rozwiązanie dokładne. Taki algorytm również można znaleźć dla grafów pełnych z drzewami w szkielecie, przy założeniu dostatecznie małej lub dużej wartości parametru λ względem rozmiaru partycji szkieletu. W ogólnym przypadku, dla grafów pełnych z grafami dwudzielnymi w szkielecie oraz dla grafów kolczastych istnieją efektywne algorytmy przybliżone.

Niniejsza praca składa się z pięciu rozdziałów. W pierwszym z nich, mającym charakter wprowadzający, przedstawione zostaną pokrótce podstawowe definicje z zakresu teorii grafów oraz złożoności obliczeniowej, wykorzystywane do formalnego modelowania oraz badania omawianych zagadnień. Przede wszystkim zostaną omówione pojęcia i fakty mające szczególne znaczenie w problemie szkieletowego kolorowania grafów.

W drugim rozdziale zostaną zawarte najważniejsze własności pokolorowań szkieletowych. Najpierw wprowadzone zostaną elementarne relacje, zachodzące między podstawowym parametrem w problemie szkieletowego kolorowania grafów, szkieletową liczbą chromatyczną, a innymi parametrami grafu, np. liczbą chromatyczną grafu oraz liczbą chromatyczną szkieletu. Następnie, przedstawione zostaną nowe ograniczenia górne i dolne dla szkieletowej liczby chromatycznej, zależne od liczby chromatycznej grafu i szkieletu, ulepszające ogólne ograniczenia, znane z prac [6,29]. Ponadto zostanie zaprezentowany dowód, że asymptotycznie stosunek szkieletowej liczby chromatycznej do parametru λ dąży do liczby chromatycznej szkieletu. Co więcej, zostanie wykazane, że dla dużych wartości parametru λ wartość szkieletowej liczby chromatycznej daje się wyrazić wzorem zależnym wyłącznie od wartości λ, liczby chromatycznej szkieletu oraz pewnego parametru zależnego wyłącznie od grafów G i H. Na koniec rozdziału przedstawione zostaną dwa algorytmy wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej w przypadku, gdy szkielet jest dwudzielny: liniowy algorytm 2-przybliżony (1.5-przybliżony, gdy nałożone zostanie dodatkowe ograniczenie o spójności szkieletu) oraz kwadratowy algorytm dla przypadku, gdy szkielet jest drzewem spinającym, zwracający rozwiązanie dokładne dla prawie wszystkich wartości λ.

Trzeci rozdział poświęcony będzie kolorowaniu szkieletowemu grafów planarnych, dotychczas poruszanemu w pracach [7, 12, 14, 29], aczkolwiek częściej badanego pod kątem poszukiwania grafów ekstremalnych. Przedstawiona zostanie pełna klasyfikacja złożoności obliczeniowej decyzyjnej wersji problemu kolorowania szkieletowego grafów planarnych ze spójnymi szkieletami wraz z podaniem wielomianowych algorytmów znajdujących optymalne pokolorowanie w przypadkach, w których jest to możliwe. Jednocześnie, dla grafów planarnych z drzewami spinającymi w szkielecie również zostanie podana niemal pełna klasyfikacja złożoności obliczeniowej – z wyjątkiem trzech przypadków, w których problem nadal pozostaje otwarty. Okazuje się, że zagadnienie kolorowania szkieletowego grafów planarnych pozostaje w dużej mierze $\mathcal{NP}$-trudne, jednak w szczególnych przypadkach możliwe jest podanie algorytmu dokładnego lub bezwzględnie przybliżonego.

Treścią kolejnego, czwartego rozdziału będzie analiza zagadnienia kolorowania szkieletowego dla grafów o ustalonym maksymalnym stopniu. Zostanie przedstawiony dowód i algorytm znajdowania optymalnego pokolorowania szkieletowego dla grafów podkubicznych o spójnym szkielecie. Zarazem zostanie dowiedziona $\mathcal{NP}$-trudność problemu dla grafów, których maksymalny stopień jest ograniczony przez dowolną ustaloną liczbę większą niż 3 oraz spójnych szkieletów. Ponadto, nawet jeśli ograniczymy klasę dozwolonych szkieletów tylko do drzew, to możliwe jest pokazanie, że zagadnienie pozostaje $\mathcal{NP}$-trudne dla grafów o maksymalnym stopniu ograniczonym przez dowolną ustaloną liczbę większą niż 4.

W piątym rozdziale, zamykającym główną część wyników, przedstawiony zostanie algorytm wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej dla split grafów ze skojarzeniem w szkielecie. Chociaż istnieje podane w [8, 9] ścisłe ograniczenie ogólne na wartość szkieletowej liczby chromatycznej, dotychczas nieznana była złożoność obliczeniowa algorytmu dokładnego. Przedstawiony algorytm, działający w czasie kwadratowym, bazuje na przekształceniu problemu do wyznaczenia optymalnego pokolorowania szkieletowego grafu pełnego z lasem lub zbiorem grafów unicyklicznych w szkielecie.

Przedstawione powyżej wyniki zawarte w rozprawie zostały wcześniej opublikowane lub przyjęte do publikacji głównie w następujących pracach:

- R. Janczewski, K. Turowski, *The backbone coloring problem for bipartite backbones*. Przyjęte do druku w *Graphs and Combinatorics* (DOI:10.1007/s00373-014-1462-9).
- R. Janczewski, K. Turowski, *The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones*. Information Processing Letters 115 (2015), s. 232–236 (DOI:10.1016/j.ipl.2014.09.018).
- R. Janczewski, K. Turowski, *The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones*. Przyjęte do druku w *Discrete Applied Mathematics* (DOI:10.1016/j.dam.2014.10.028).
- K. Turowski, *Optimal coloring of split graphs with matching backbone*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 35(1) (2015), s. 157–169 (DOI:10.7151/dmgt.1786).

Wszystkie powyższe publikacje ukazały się lub są dostępne online w pismach znajdujących się w bazie ISI Journal of Citation Reports (na tzw. liście filadelfijskiej).

1.2. Elementy teorii grafów

Ponieważ dalsze rozważania bazować będą na wiedzy z zakresu matematyki dyskretnej i teorii grafów, poniższy przegląd pojęć i faktów służy omówieniu podstawowych zagadnień związanych z przyjętym w pracy badanym modelem dla problemu przydziału częstotliwości – szkieletowym kolorowaniem grafów. Czytelnika zainteresowanego szerszym i bardziej szczegółowym omówieniem podstaw teoriografowych odsyłamy do literatury, w szczególności [4], [17] i [44]. Osobom chcącym zagłębić się w problematykę kolorowania grafów należy polecić z kolei książki [35] oraz [34], natomiast zagadnienia związane ze złożonością obliczeniową są szerzej omówione w [37], [1] oraz [19]. W szczególności, ta ostatnia książka zawiera zestawienie najważniejszych problemów $\mathcal{NP}$-zupełnych i $\mathcal{NP}$-trudnych.

1.2.1. Podstawowe definicje

Definicja 1.1. *Grafem prostym* nazywamy każdą parę (V, E), gdzie V jest niepustym i skończonym zbiorem, natomiast $E \subseteq \{\{u, v\}\colon\ u, v \in V \wedge u \neq v\}$. Jeśli

$G = (V, E)$ jest grafem prostym, to elementy zbioru V nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru E – *krawędziami* grafu G.

Graf skierowany (zwany również *digrafem*) różni się od grafu prostego tym, że jego krawędziami nie są dwuelementowe podzbiory, ale uporządkowane pary zbioru wierzchołków. Ponieważ w przeważającej części pracy pojawiają się tylko grafy proste, wyrażenia „graf" oraz „graf prosty" będą stosowane zamiennie. Dodatkowo, mając na uwadze skrócenie notacji, jeśli to nie prowadzi do nieporozumień, to w niniejszej pracy krawędzie będą oznaczane symbolami uv zamiast $\{u, v\}$.

Tak jak przyjęło się to w literaturze, $V(G)$ oznaczać będzie zbiór wierzchołków grafu G, $E(G)$ zbiór jego krawędzi, $n(G) := |V(G)|$ – *rząd* grafu G, natomiast $m(G) := |E(G)|$ jego *rozmiar*. Zbiór wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v w grafie G, nazywany *sąsiedztwem*, oznaczamy formalnie $N_G(v) := \{u \in V(G) \colon uv \in E(G)\}$. Liczba $\deg_G(v) := |N_G(v)|$ jest *stopniem* wierzchołka v w grafie G, z kolei $\Delta(G) := \max\{\deg_G(v) \colon v \in V(G)\}$ nazywany jest *stopniem* grafu G.

Oznaczenia $V(G)$, $E(G)$, $n(G)$, $m(G)$ są również dobrze zdefiniowane dla grafów skierowanych. W tym przypadku jednak należy rozróżnić dwa rodzaje krawędzi incydentnych do wierzchołka v: krawędzie *wchodzące* do v, czyli (u, v) oraz krawędzie *wychodzące* z v, czyli (v, u). Odpowiednio, w grafie skierowanym zdefiniowane są dwa stopnie wierzchołka v w grafie G: *wejściowy* $\mathrm{indeg}_G(v) := |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$ oraz *wyjściowy* $\mathrm{outdeg}_G(v) := |\{u \in V(G) \colon (v, u) \in E(G)\}|$.

Definicja 1.2. Graf G jest *podgrafem* grafu H (oznaczane $G \subseteq H$) wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \subseteq V(H)$ i $E(G) \subseteq E(H)$.

Rzecz jasna, jeśli G jest podgrafem H, to równoważnie H jest *nadgrafem* G. Jeśli zachodzi $V(G) = V(H)$, to G nazywane jest podgrafem *spinającym* grafu H.

Definicja 1.3. Graf G jest *podgrafem indukowanym* grafu H wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \subseteq V(H)$ i $E(G) = \{uv \colon u, v \in V(G) \wedge uv \in E(H)\}$.

Jeśli mamy dany niepusty zbiór $W \subseteq V$, to podgraf indukowany grafu G zawierający tylko i wyłącznie wierzchołki ze zbioru W oznaczamy $G[W]$.

Definicja 1.4. *Częścią wspólną* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \cap H$, że $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ i $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

Definicja 1.5. *Sumą* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \cup H$, że $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ i $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Definicja 1.6. *Różnicą* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \setminus H$, że $V(G \setminus H) = V(G)$ i $E(G \setminus H) = E(G) \setminus E(H)$.

Definicja 1.7. *Dopełnieniem* grafu G jest nazywany taki graf $\bar{G}$, że $V(G) = V(\bar{G})$ i $E(\bar{G}) = \{uv \colon u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$.

Graf G o n wierzchołkach jest *grafem pustym* (i oznaczany symbolem N_n) wtedy i tylko wtedy, gdy $E(G) = \emptyset$. Z kolei graf G o n wierzchołkach jest *kliką*, *grafem pełnym* (i oznaczany symbolem K_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dopełnieniem grafu pustego o n wierzchołkach. Zbiór I jest *zbiorem niezależnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $I = \emptyset$ lub $G[I]$ jest grafem pustym, natomiast zbiór C jest *kliką* wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \emptyset$ lub $G[C]$ jest grafem pełnym. Największa liczba $k \in \mathbb{N}_+$, taka że G posiada k-wierzchołkowy podgraf będący kliką, jest nazywana *liczbą klikową* grafu G i oznaczana symbolem $\omega(G)$.

Definicja 1.8. Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki podział V_1, V_2 zbioru wierzchołków $V(G)$, że $E(G) = E\left(G[V_1]\right) \cup E\left(G[V_2]\right)$.

Równoważnie, graf jest spójny, gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje sekwencja wierzchołków $u = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v$ taka, że $v_{i-1}v_i \in E(G)$ dla każdego $1 \le i \le k$. Z kolei gdy graf nie jest spójny, można jednoznacznie wyznaczyć taki podział $V(G)$ na parami rozłączne zbiory $V_1, V_2, \ldots, V_k$, że każda krawędź grafu G należy do dokładnie jednego $G[V_i]$ oraz każdy z grafów $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ jest spójny. Takie grafy nazywane są *składowymi spójności* grafu G.

Oprócz grafów pustych, pełnych i spójnych należy wyróżnić jeszcze inne, przydatne w wielu miejscach niniejszej pracy, klasy grafów:

- *cykle* – grafy spójne, w których każdy wierzchołek ma stopień 2,
- *drzewa* – grafy spójne, niezawierające cykli,
- *ścieżki* – drzewa stopnia $\Delta \le 2$,
- *lasy* – grafy acykliczne,
- *gwiazdy* – drzewa stopnia $\Delta = n - 1$,
- *galaktyki* – grafy, będące zbiorem parami rozłącznych gwiazd,
- *skojarzenia* – grafy stopnia $\Delta \le 1$,
- *doskonałe skojarzenia* – skojarzenia bez wierzchołków izolowanych,
- *grafy planarne* – grafy, które można narysować na płaszczyźnie bez przecięć.

W dalszej części pracy cykle n-wierzchołkowe będą oznaczane symbolem C_n, ścieżki n-wierzchołkowe – symbolem P_n.

Czytelnik może zauważyć, że przedstawiona powyżej definicja skojarzenia odbiega od klasycznej, według której skojarzenie jest podzbiorem krawędzi zadanego grafu takim, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej krawędzi. Motywowane jest to użyciem skojarzeń jako jednej z typowych klas szkieletów (obok galaktyk, ścieżek i drzew) w literaturze dotyczącej kolorowania szkieletowego – i wynikającą stąd koniecznością ujednolicenia definicji z pozostałymi przypadkami.

Ponadto, grafem dwudzielnym nazywamy graf, w którym istnieje podział $V(G) = V_1 \cup V_2$ taki, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i każdy z podgrafów indukowanych $G[V_i]$ $(i = 1, 2)$ jest grafem pustym. Ogólniej, można zdefiniować graf k-dzielny jako taki, w którym istnieje podział $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_k$ taki, że $V_i \cap V_j = \emptyset$ dla dowolnych i, j z zakresu od 1 do k, a każdy z podgrafów indukowanych $G[V_i]$ $(1 \leq i \ \leq k)$ jest grafem pustym.

1.2.2. Pokolorowania szkieletowe

Za pokolorowania zwyczajowo są uznawane w teorii grafów funkcje przyporządkowujące pewnym elementom grafu (wierzchołkom, krawędziom, ścianom, ...) liczby całkowite (nazywane kolorami) w taki sposób, że sąsiednie elementy nie otrzymują identycznych liczb. W niniejszej pracy rozważane będą pokolorowania wierzchołkowe i ich różne odmiany.

Definicja 1.9. Niech G będzie grafem. Funkcja $c \colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *pokolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $c(u) \neq c(v)$.

Definicja 1.10. Niech G będzie grafem. Funkcja $c \colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *k-pokolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy c jest pokolorowaniem grafu G oraz $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) \leq k$.

Dla każdego grafu G istnieje najmniejsza liczba $k \in \mathbb{N}_+$, dla której istnieje k-pokolorowanie. Liczba ta nazywana jest *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczana jako $\chi(G)$.

Definicja 1.11. Pokolorowanie c grafu G jest *optymalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) = \chi(G)$.

Warto zauważyć, że wyznaczenie optymalnego pokolorowania wierzchołkowego jest bardzo trudnym problemem z punktu widzenia teorii złożoności. Przede wszystkim, od dawna wiadomo, że wyznaczenie dokładnej wartości liczby chromatycznej grafu G jest problemem $\mathcal{NP}$-trudnym [19]. Ponadto, Zuckerman w [46] wykazał, że również oszacowanie $\chi(G)$ z dokładnością $n^{1-\epsilon}$ dla dowolnej wartości $\epsilon > 0$ jest

$\mathcal{NP}$-trudne. Z drugiej strony, dla wielu klas grafów istnieją algorytmy wyznaczające optymalne pokolorowania, działające w czasie wielomianowym. W szczególności, jest to możliwe dla wszystkich grafów doskonałych (tj. grafów G spełniających równość $\chi(G') = \omega(G')$ dla wszystkich podgrafów indukowanych G' grafu G) [24], w tym m.in. grafów dwudzielnych, split grafów oraz grafów cięciwowych.

Fakt 1.1. *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n(G)$.*

Definicja 1.12. Niech G będzie grafem, a H jego podgrafem spinającym. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *λ-szkieletowym pokolorowaniem* grafu G ze szkieletem H wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $c(u) \neq c(v)$ oraz dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ zachodzi $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$.

Definicja 1.13. Niech G będzie grafem, a H jego podgrafem spinającym. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *λ-szkieletowym k-pokolorowaniem* grafu G ze szkieletem H wtedy i tylko wtedy, gdy c jest λ-szkieletowym pokolorowaniem grafu G ze szkieletem H oraz $\max_{v \in V(G)} c(v) \leq k$.

Analogicznie do kolorowania wierzchołkowego, również dla kolorowania szkieletowego można zdefiniować λ-szkieletową liczbę chromatyczną grafu G ze szkieletem H, oznaczoną symbolem $BBC_\lambda(G, H)$, jako najmniejszą liczbę $k \in \mathbb{N}_+$, dla której istnieje λ-szkieletowe k-pokolorowanie c. Należy zwrócić uwagę, że – w przeciwieństwie do optymalnego pokolorowania wierzchołkowego – optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie nie musi wykorzystywać wszystkich kolorów od 1 do $BBC_\lambda(G, H)$.

Definicja 1.14. λ-szkieletowe pokolorowanie c grafu G ze szkieletem H jest *optymalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $\max_{v \in V(G)} c(v) = BBC_\lambda(G, H)$.

Ponieważ pierwotne sformułowanie problemu kolorowania szkieletowego obejmowało tylko przypadek $\lambda = 2$, zajmuje on do dziś szczególne miejsce w literaturze przedmiotu. Znajduje to wyraz w konwencji notacyjnej opuszczania oznaczenia λ m.in. w nazwie problemu i funkcji („pokolorowanie szkieletowe” zamiast „2-pokolorowanie szkieletowe”) oraz oznaczenia liczby chromatycznej ($BBC(G, H)$ zamiast $BBC_2(G, H)$). Konwencja ta została również przyjęta w niniejszej pracy.

W całej niniejszej pracy będzie konsekwentnie przyjęte, że graf i szkielet są określone na tym samym zbiorze wierzchołków, $V(G) = V(H)$. Jest to wygodna konwencja, ponieważ w przypadku $V(H) \subset V(G)$ zawsze można uzupełnić szkielet H

wierzchołkami izolowanymi, otrzymując $H' = (V(G), E(H))$. Takie przekształcenie nie zmienia zbioru możliwych λ-szkieletowych pokolorowań, ani innych parametrów związanych z tym problemem.

Istnieje ścisły związek między pokolorowaniami wierzchołkowymi a pokolorowaniami λ-szkieletowymi: każde pokolorowanie wierzchołkowe grafu G rzędu n jest jednocześnie λ-szkieletowym pokolorowaniem grafu G ze szkieletem pustym N_n. Co więcej, dla dowolnego grafu G rzędu n zachodzi $BBC_\lambda(G, N_n) = \chi(G)$.

Odpowiednie zależności można wyznaczyć również dla podgrafów: jeśli G jest grafem, a H i H' jego podgrafami spinającymi takimi, że H jest podgrafem H', to zachodzi $BBC_\lambda(G, H) \leq BBC_\lambda(G, H')$. Podobnie, jeśli G jest grafem, a G' i H jego podgrafami spinającymi takimi, że H jest podgrafem G', to zachodzi $BBC_\lambda(G', H) \leq BBC_\lambda(G, H)$.

1.3. Związki kolorowania szkieletowego z innymi modelami grafowymi dla przydziału częstotliwości

Problem λ-szkieletowego kolorowania grafów jest ściśle związany z innymi problemami w teorii grafów, wykorzystywanymi do zamodelowania problemu przydziału częstotliwości.

Kolorowanie radiowe jest zagadnieniem, w którym nacisk położony jest na geograficzne położenie nadajników: im bliżej są w grafie, tym większe wywołują zakłócenia. Przyjęto, że dla danego grafu G jego pokolorowaniem radiowym jest funkcja c przydzielająca wierzchołkom kolory w taki sposób, że dwa wierzchołki otrzymują różne kolory, gdy istnieje między nimi ścieżka długości 2 w G, natomiast różnica kolorów im przydzielonych musi być nie mniejsza od 2 dla wszystkich par wierzchołków sąsiadujących ze sobą w G. Klasycznym kryterium minimalizacji jest rozpiętość, czyli najmniejsza wartość $|c(u)-c(v)|$ po wszystkich parach wierzchołków $u, v \in V(G)$. Ten model, znany również w literaturze pod nazwą $L(2,1)$-kolorowania, $\lambda_{2,1}$-kolorowania i $\chi_{2,1}$-kolorowania, został wprowadzony przez Griggsa i Yeha w [23]. W ramach tego modelu ciekawym kierunkiem jest badanie problemów dla zadanego uprzednio częściowego prekolorowania, poruszone w pracach [2] i [18].

Zagadnienie λ-szkieletowego kolorowania grafów historycznie wyrasta z uogólnienia problemu kolorowania radiowego [6]. Z definicji obu problemów wynika, że każde pokolorowanie radiowe grafu G jest zarazem szkieletowym pokolorowaniem grafu

G^2, czyli grafu powstałego z grafu G poprzez dodanie krawędzi dla wszystkich par wierzchołków u, v, mających wspólnego sąsiada w G, ze szkieletem G.

Etykietowanie radiowe jest wariantem problemu przydziału częstotliwości, dla którego przyjmuje się, że wszystkie kanały częstotliwości, przydzielone stacjom bazowym na zadanym obszarze, powinny być różne. Jednocześnie, nałożone jest dodatkowe ograniczenie na pary nadajników umiejscowionych dostatecznie blisko siebie i emitujących na dany obszar sygnały zakłócające się wzajemnie. Formalnie oznacza to, że dla danego grafu G poszukiwana jest funkcja c, spełniająca warunek $c(u) \neq c(v)$ dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V(G)$ oraz $|c(u) - c(v)| \geq 2$ dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$. Zagadnienie to było badane w różnych aspektach dla wielu klas grafów: wśród najważniejszych wyników należy wyróżnić dowody $\mathcal{NP}$-trudności problemu dla grafów planarnych, split grafów oraz dopełnień grafów dwudzielnych [3] oraz algorytm wielomianowy dla drzew i kografów [15].

Co ważne, problem etykietowania radiowego jest szczególnym przypadkiem kolorowania szkieletowego dla $\lambda = 2$ oraz grafu pełnego K_n ze szkieletem G [6].

$L(p,q)$**-kolorowanie grafów** wyrasta z jednego z wariantów problemu przydziału częstotliwości wspomnianego w pracy [38]. Formalnie, można zagadnienie $L(p,q)$-kolorowania grafów zdefiniować następująco: dla danego grafu G oraz liczb naturalnych p, q należy znaleźć pokolorowanie wierzchołkowe spełniające dodatkowe warunki: dla każdej pary wierzchołków u, v różnica kolorów im przydzielonych powinna być równa co najmniej q, jeśli wierzchołki te sąsiadują w grafie G i równa co najmniej p, jeśli odległość między nimi w grafie G jest równa 2. Tak, jak w powyższych problemach, również i tutaj celem jest minimalizacja rozpiętości szukanego pokolorowania. Czytelnika zainteresowanego problemem $L(p,q)$-kolorowania grafów oraz różnymi jego wariantami odsyłamy do pracy [45] oraz do wyczerpującego przeglądu wyników w [13].

Należy zwrócić uwagę, że – tak samo jak w przypadku $L(2,1)$-kolorowania – również problem $L(p,1)$-kolorowania grafu G jest tożsamy z problemem p-szkieletowego kolorowania grafu G^2 ze szkieletem G.

ξ**-kolorowanie** Pewnym wariantem kolorowania kontrastowego jest zagadnienie ξ-kolorowania grafów, sformułowane następująco: dany jest graf G oraz funkcja $\xi\colon E(G) \to \mathbb{N}$. Celem jest wyznaczenie ξ-pokolorowania grafu G, tj. takiej funkcji $c\colon V(G) \to \mathbb{Z}$, że $|c(u) - c(v)| \geq \xi(uv)$ dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$, która będzie minimalizować rozpiętość, czyli odległość między najmniejszym a największym kolorem. Na kolorowanie λ-szkieletowe można patrzeć jako na wariant ξ-kolorowania, w którym zbiór wartości funkcji ξ składa się tylko z liczb 1 oraz λ. Innym kryterium optymalizacji dla ξ-kolorowania jest poszukiwanie rozpiętości krawędziowej, czyli minimalnej możliwej wartości $|c(u) - c(v)|$ jedynie po wszystkich krawędziach $uv \in E(G)$. Więcej informacji dotyczących problemu ξ-kolorowania grafów można znaleźć w pracy [33].

Kolorowanie kontrastowe, znane także w literaturze jako T-kolorowanie, jest problemem zdefiniowanym następująco: niech dany będzie graf G oraz zbiory T_e, będące skończonymi podzbiorami liczb naturalnych takimi, że $0 \in T_e$, zdefiniowanymi dla każdej krawędzi $e \in E(G)$. Funkcję c nazywamy T-pokolorowaniem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $|c(u)-c(v)| \notin T_{uv}$. Z definicji wprost wynika, że kolorowanie λ-szkieletowe jest szczególnym przypadkiem kolorowania kontrastowego, w którym zbiory T_e są dwojakiej postaci: albo $\{0\}$, albo $\{0, 1, \ldots, \lambda - 1\}$. Krawędzie odpowiadające zbiorom drugiego typu w kolorowaniu kontrastowym można bezpośrednio utożsamić z krawędziami szkieletowymi w kolorowaniu λ-szkieletowym.

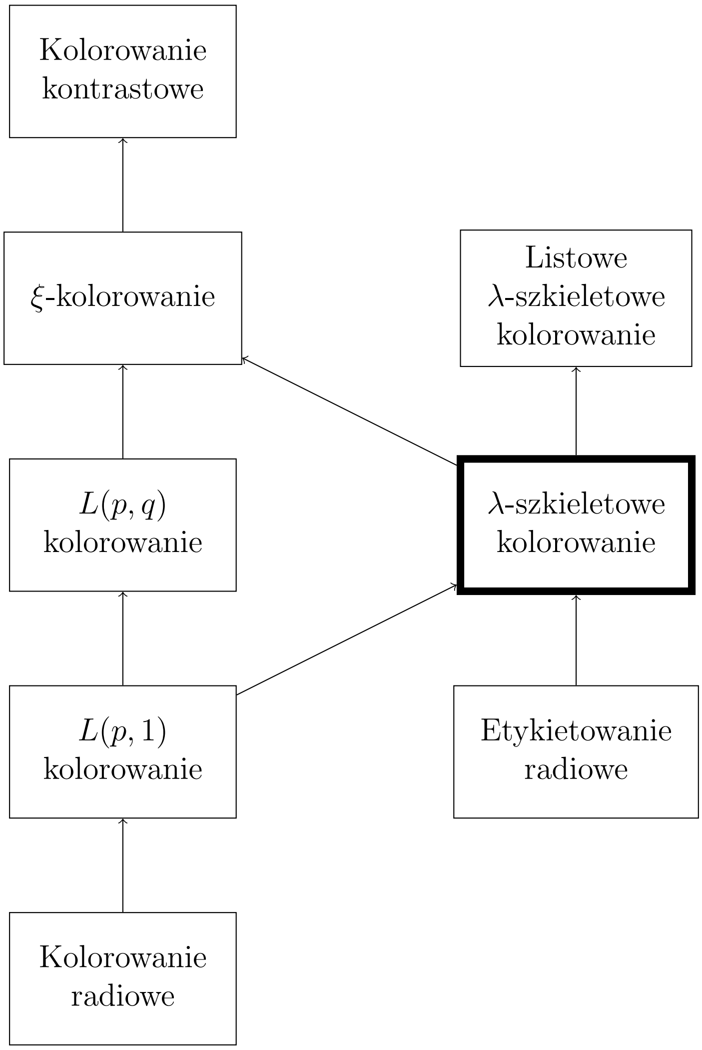
W ogólnym przypadku, zbiory T_e odpowiadające krawędziom mogą być różne i zmieniać się niezależnie od siebie. Jednak z uwagi na dużą trudność przypadku ogólnego, uwaga badaczy skupiła się głównie na wariancie problemu, w którym wszystkie zbiory są identyczne. Wyniki z zakresu kolorowania kontrastowego można znaleźć m.in. w pracach [16, 22, 38].

Listowe kolorowanie szkieletowe, rozpatrywane w pracach [11] oraz [28], jest uogólnieniem problemu kolorowania λ-szkieletowego – a z drugiej strony nawiązaniem do innego szeroko badanego problemu chromatycznej teorii grafów, jakim jest kolorowanie listowe [5]. Niech każdemu wierzchołkowi v grafu G przyporządkowana zostanie skończony zbiór liczb naturalnych $L(v)$. Wówczas λ-szkieletowym pokolorowaniem listowym grafu nazywamy λ-szkieletowe pokolorowanie c takie, że dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G)$ zachodzi $c(v) \in L(v)$.

Na problem λ-szkieletowego kolorowania grafu można patrzeć jak na szczególny przypadek λ-szkieletowego kolorowania listowego grafów, w którym zbiory kolorów dozwolonych dla każdego wierzchołka są odpowiednio dużym zbiorem kolejnych liczb naturalnych, począwszy od 1.

W literaturze przedmiotu głównym zagadnieniem badanym w modelu kolorowania listowego jest k-wybieralność. W szczególności, graf G ze szkieletem H jest λ-szkieletowo k-wybieralny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych list $L(v) \subset \mathbb{N}$ takich, że $|L(v)| \le k$, istnieje λ-szkieletowe pokolorowanie listowe grafu G ze szkieletem H.

Poniższy rysunek przedstawia zależności między poszczególnymi problemami, spotykanymi w zagadnieniach przydziału częstotliwości:



Rys. 1.1. Hierarchia modeli dla problemu przydziału częstotliwości.

Rozdział 2

Kolorowanie szkieletowe grafów z dwudzielnym szkieletem

Dotychczas dla grafów ogólnych znane były następujące trywialne ograniczenia górne i dolne:

Twierdzenie 2.1 (Broersma et al., [7]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem G. Wówczas zachodzi $\chi(G) \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(G) - 1) + 1$.*

W pracy [29] zostało zaproponowane dokładniejsze ograniczenie:

Twierdzenie 2.2 (Havet et al., [29]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem G. Wówczas zachodzi $BBC_\lambda(G, H) \leq (\lambda + \chi(G) - 2)\chi(H) - \lambda + 2$.*

W pierwszej części artykułu [30] badane są ogólne zależności między parametrami grafów G i H oraz wartością λ a λ-szkieletową liczbą chromatyczną $BBC_\lambda(G, H)$:

Twierdzenie 2.3 (Janczewski, Turowski, [30]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem spinającym G. Wówczas zachodzi $\lambda(\chi(H) - 1) + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(H) - 1) + n(G) - \chi(H) + 1$.*

Okazuje się, że każde optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie c grafu G ze szkieletem H można rozbić na dwie funkcje q i r, z których pierwsza musi być pewnym optymalnym pokolorowaniem szkieletu H, wyznaczając jednocześnie zbiory wierzchołków V_0, V_1, $\ldots$, V_{k-1}. Jednocześnie, druga funkcja, nazwana q-szkieletową funkcją resztową, musi spełniać ściśle określone warunki: być pokolorowaniem dla każdego $G[V_i]$ $(0 \leq i \leq k-1)$, spełniać $r(u) \leq r(v)$ dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ takiej, że $q(v) = q(u) + 1$.

Na tej podstawie przydatne okazało się zdefiniowanie liczby bichromatycznej:

Definicja 2.1. Niech q będzie k-pokolorowaniem grafu G. Ponadto zdefiniujmy $\chi(G,H,q) := \min\{\max r\,(q^{-1}(\{k-1\})) : r \text{ jest } q\text{-szkieletową funkcją resztową}\}$. Wówczas *liczbą bichromatyczną* grafu G ze szkieletem H, oznaczaną $\chi(G,H)$, nazywana jest minimalna wartość $\chi(G,H,q)$ po wszystkich q, będących optymalnymi pokolorowaniami grafu H.

Dla dużych wartości λ możliwe jest wyznaczenie dokładnej wartości $BBC_\lambda(G,H)$ na podstawie $\chi(G,H)$, $\chi(H)$ oraz λ:

Twierdzenie 2.4 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Niech G będzie grafem, a H podgrafem spinającym G. Jeśli $\lambda > n(G) - \chi(H)$, to $BBC_\lambda(G,H) = \lambda(\chi(H)-1) + \chi(G,H) + 1$.*

Ponadto, dowiedziono, że warunek $\lambda > n(G) - \chi(H)$ jest konieczny – w przeciwnym przypadku można podać grafy G i H, które dla dowolnych wartości $\lambda \leq n(G) - \chi(H)$ nie spełniają powyższej zależności.

Drugą część artykułu [30] stanowią analizy problemu λ-szkieletowego pokolorowania dla grafów pełnych z dwudzielnym szkieletem. Przede wszystkim, przedstawiony jest algorytm, działający w czasie $O(n+m)$, znajdujący rozwiązanie przybliżone.

Algorytm 1 Algorytm kolorowania grafu pełnego K_n z grafem dwudzielnym H w szkielecie

1: Wyznacz 2-pokolorowanie q grafu H oraz jego partycje V_0 i V_1 takie, że $V_i = q^{-1}(\{i\})$ $(i = 1,2)$ oraz $|V_0| \leq |V_1|$
2: Wyznacz pokolorowanie r dla V_0 przydzielając kolory 0, 1, ..., $|V_0| - 1$
3: Wyznacz pokolorowanie r dla V_1 przydzielając kolory $|V_0|-1$, $|V_0|, \ldots, n(G)-2$

4: **for all** $v \in V(G)$ **do**
5: $\quad c(v) := \max\{\lambda, |V_0|\}q(v) + r(v) + 1$
6: **return** c

Twierdzenie 2.5 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Jeśli H jest grafem dwudzielnym, to algorytm 1 jest 2-przybliżony. Jeśli dodatkowo H jest grafem spójnym, to algorytm jest 1.5-przybliżony.*

Na koniec, podany został dokładny wzór na liczbę bichromatyczną dla grafów pełnych z drzewem w szkielecie:

Twierdzenie 2.6 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Jeśli H jest lasem, to $\chi(K_n,H) \leq |V_1| - 1$. Jeśli H jest drzewem, to $\chi(K_n,H) = |V_1| - 1$.*

Dowód tego twierdzenia można łatwo przekształcić na algorytm o złożoności czasowej $O(n^2)$ wyznaczający optymalną szkieletową funkcję resztową odpowiadającą liczbie bichromatycznej grafu pełnego z drzewem w szkielecie, zatem z twierdzenia 2.4 i 2.6 istnieje optymalny algorytm λ-szkieletowego kolorowania grafów pełnych z drzewami w szkielecie dla $\lambda > n(G) - 2$. Jednocześnie, gdy H jest drzewem o partycjach V_0 i V_1 takich, że $\lambda \leq |V_0| \leq |V_1|$, to zachodzi $BBC_\lambda(K_n, H) = n$ i również możliwe jest znalezienie rozwiązania optymalnego w czasie $O(n^2)$.

Rozdział 3

Kolorowanie szkieletowe grafów planarnych

Dotychczas, jedyne wyniki dla kolorowania szkieletowego grafów planarnych wynikały z ograniczeń ogólnych (podanych w tw. 2.1 oraz 2.2). W szczególności, wykazano że:

Twierdzenie 3.1 (Havet et al., [29])**.** *Jeśli G jest grafem planarnym a H lasem, to* $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 6$.

Jednocześnie, w tej samej pracy przedstawiono cząstkowe wyniki dotyczące trudności problemu λ-kolorowania szkieletowego i cyrkularnego λ-kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych z lasami w szkielecie. Natomiast w pracy [31] przedstawione zostały pełne wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemu λ-szkieletowego kolorowania grafów planarnych ze spójnymi szkieletami.

Jeśli problem λ-szkieletowej k-kolorowalności grafów planarnych zdefiniujemy następująco: „czy dla zadanego grafu planarnego G ze spójnym spinającym podgrafem H istnieje λ-szkieletowe k-pokolorowanie, tj. czy $BBC_\lambda(G, H) \leq k$?", to okazuje się, że dla problemu kolorowania można wyznaczyć kompletną klasyfikację złożoności obliczeniowej tego problemu dla dowolnego k, przedstawioną w tabeli 3.1. Jednocześnie, jeżeli dopuszczalna klasa szkieletów zostanie ograniczona tylko do drzew spinających, to również dla tego problemu można wyznaczyć niemal kompletną klasyfikację złożoności obliczeniowej. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 3.2.

W dalszej części artykułu badano również problem kolorowania λ-szkieletowego dla szczególnych podklas grafów planarnych: kaktusów oraz grafów kolczastych. Kaktusy, wprowadzone pierwotnie w literaturze jako drzewa Husimiego [27], zdefiniowano następująco:

$BBC_2(G,H) \le k$		
$k \le 2$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 3$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 4$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$5 \le k \le 6$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 8, [31]
$k \ge 7$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_3(G,H) \le k$		
$k \le 3$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 4$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 5$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$6 \le k \le 9$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]
$k \ge 10$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_4(G,H) \le k$		
$k \le 4$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 5$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 6$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$7 \le k \le 12$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]
$k \ge 13$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_5(G,H) \le k$		
$k \le 5$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 6$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 7$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$8 \le k \le 15$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]
$k \ge 16$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_\lambda(G,H) \le k$ $(\lambda \ge 6)$		
$k \le \lambda$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$\lambda + 3 \le k \le \lambda + 5$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$\lambda + 6 \le k \le 2\lambda$	$O(n)$	Tw. 7, [31]
$2\lambda + 1 \le k \le 3\lambda$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 8, [31]
$k \ge 3\lambda + 1$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

TABELA 3.1. Złożoność problemu kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych ze spójnym szkieletem. [31]

Definicja 3.1. Graf spójny jest *kaktusem* wtedy i tylko wtedy, gdy jego każda krawędź należy do co najwyżej jednego cyklu.

Twierdzenie 3.2 (Janczewski, Turowski, [31])**.** *Jeśli G jest kaktusem, a H spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym G, to $BBC_\lambda(G,H) \le \lambda + 3$. Ograniczenie jest ścisłe.*

Co więcej, w [31] zawarto również dowód faktu, że ograniczenie pozostaje ścisłe, nawet gdy szkielet jest drzewem.

Szeroką podklasą grafów planarnych, zawierającą nie tylko kaktusy, ale również wszystkie grafy zewnętrznie planarne, są grafy kolczaste. Zostały one po raz pierwszy zdefiniowane w pracy [21]:

Definicja 3.2. Graf spójny G jest *grafem kolczastym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jego dekompozycja na grafy $G_1, G_2, \ldots, G_k$, dla której spełnione są następujące warunki:

1. wszystkie grafy G_i, $1 \le i \le k$, są cyklami lub ścieżkami,
2. graf G jest sumą grafów G_1, G_2, …, G_k,

$BBC_2(G,T) \le k$		
$k \le 2$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 3$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 4$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$5 \le k \le 6$	otwarte	
$k \ge 7$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_3(G,T) \le k$		
$k \le 3$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 4$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 5$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$k = 6$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$7 \le k \le 8$	otwarte	
$k \ge 9$	$O(1)$	Tw. 1, 9, [31]

$BBC_4(G,T) \le k$		
$k \le 4$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 5$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 6$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$7 \le k \le 8$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k = 9$	otwarte	
$k \ge 10$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

$BBC_5(G,T) \le k$		
$k \le 5$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 6$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 7$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$8 \le k \le 10$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k \ge 11$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

$BBC_\lambda(G,T) \le k$ $(\lambda \ge 6)$		
$k \le \lambda$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$\lambda + 3 \le k \le \lambda + 5$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k \ge \lambda + 6$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

TABELA 3.2. Złożoność problemu kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych z drzewem spinającym w szkielecie.

3. dla każdego $2 \le i \le k$, część wspólna sumy grafów G_1, G_2, ..., G_{i-1} oraz grafu G_i to tylko wierzchołek lub krawędź.

Twierdzenie 3.3 (Janczewski, Turowski, [31]). *Jeśli G jest grafem kolczastym, a H spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym G, to $BBC_\lambda(G,H) \le \lambda + 4$. Ograniczenie jest ścisłe.*

Co więcej, w [31] zawarto również dowód faktu, że ograniczenie pozostaje ścisłe, nawet dla grafów kolczastych z drzewami w szkielecie.

W pracy [39] dowiedziono, że dla grafu G ze spójnym i dwudzielnym podgrafem problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G,H) \le k$ jest rozwiązywalny w czasie co najwyżej kwadratowym dla dowolnego $k \le \lambda + 2$. Ponadto przypadek, gdy szkielet jest spójny, ale nie dwudzielny jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym, ponieważ wystarczy wyznaczyć optymalne pokolorowanie c grafu G – wykonalne w czasie $O(n)$ dla grafów kolczastych – i zdefiniować pokolorowanie $c'(v) := \lambda(c(v) - 1) + 1$, będące optymalnym λ-pokolorowaniem szkieletowym dla grafu kolczastego G ze spójnym i niedwudzielnym szkieletem H.

Ostatecznie, istnieje algorytm dokładny, wyznaczający $BBC_\lambda(G, H)$ dla kaktusów G ze spójnym szkieletem H oraz algorytm 1-bezwzględnie przybliżony, wyznaczający $BBC_\lambda(G, H)$ dla grafów kolczastych G ze spójnym szkieletem H.

Rozdział 4

Kolorowanie szkieletowe grafów o ograniczonym stopniu

Twierdzenie 4.1 (Janczewski, Turowski, [32]). *Niech $\Delta(G) \leq 2$. Wówczas*

(*i*) *jeśli G ma dokładnie 1 wierzchołek, to $BBC_\lambda(G, H) = 1$,*

(*ii*) *jeśli G jest grafem dwudzielnym i $|V(G)| \geq 2$, to $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 1$,*

(*iii*) *jeśli G jest cyklem nieparzystym, H jego podgrafem spinającym i $G \neq H$, to $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 2$,*

(*iv*) *jeśli G jest cyklem nieparzystym i $G = H$, to $BBC_\lambda(G, H) = 2\lambda + 1$.*

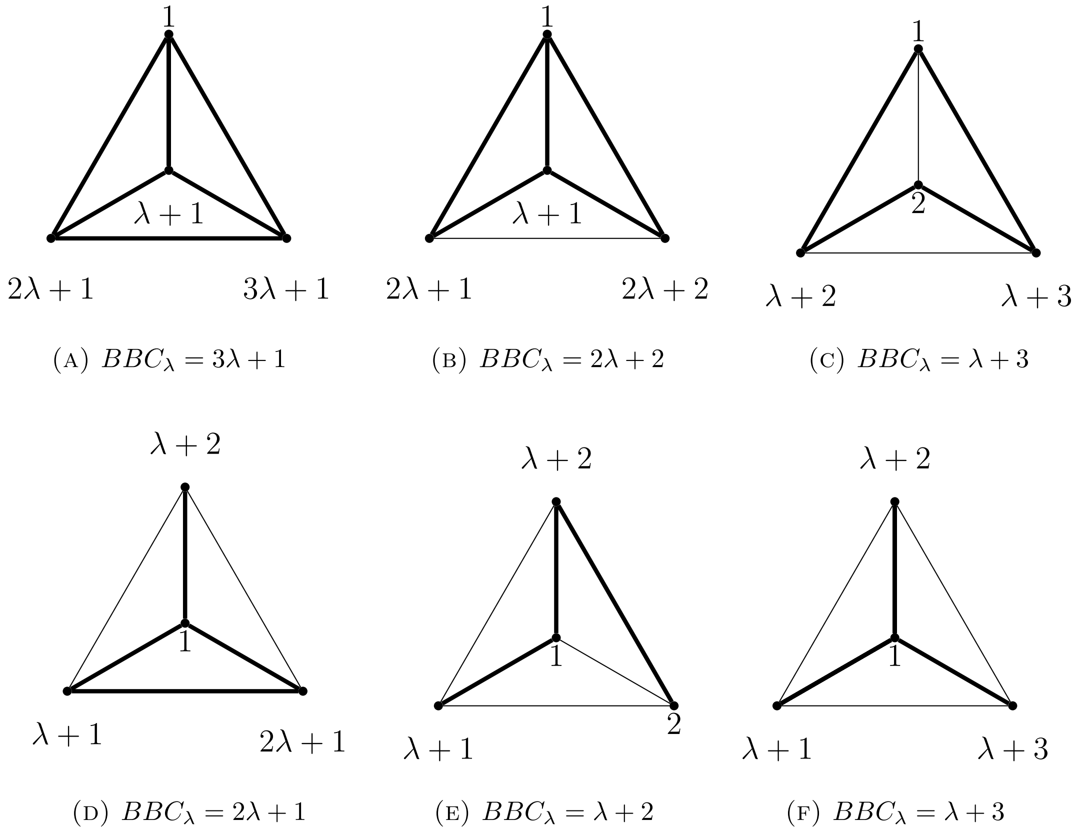
Również dla grafów podkubicznych problem jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym, aczkolwiek w tym przypadku dowód rozbito na trzy przypadki:

Twierdzenie 4.2 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli $\Delta(G) = 3$ i $\chi(G) \geq 4$, to można wyznaczyć optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G ze szkieletem H w czasie $O(1)$.*

W tym przypadku wiadomo, że $G = K_4$ z twierdzenia Brooksa [10], a zatem można sprawdzić wszystkie 6 możliwości nieizomorficznych szkieletów (przedstawione na rys. 4.1).

Twierdzenie 4.3 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli $\Delta(G) = 3$ i $\chi(G) = \chi(H) \leq 3$, to $BBC_\lambda(G, H) = (\chi(G) - 1)\lambda + 1$ i można wyznaczyć optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G ze szkieletem H w czasie $O(n)$.*

Z [30] wiadomo, że $(\chi(H) - 1)\lambda + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq (\chi(G) - 1)\lambda + 1$. Co więcej, wyznaczenie optymalnego λ-szkieletowego pokolorowania grafu G ze szkieletem H wymaga jedynie wyznaczenia optymalnego pokolorowania podkubicznego



(A) $BBC_\lambda = 3\lambda + 1$ (B) $BBC_\lambda = 2\lambda + 2$ (C) $BBC_\lambda = \lambda + 3$

(D) $BBC_\lambda = 2\lambda + 1$ (E) $BBC_\lambda = \lambda + 2$ (F) $BBC_\lambda = \lambda + 3$

RYS. 4.1. K_4 ze wszystkimi możliwymi szkieletami.

grafu G oraz zamiany na optymalne pokolorowanie λ-szkieletowe – a obie operacje są wykonywalne w czasie $O(n)$.

Twierdzenie 4.4 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli* $\Delta(G) = 3$ *i* $\chi(G) = 3$, $\chi(H) = 2$, *to można wyznaczyć optymalne* λ*-szkieletowe pokolorowanie grafu* G *ze szkieletem* H *w czasie wielomianowym.*

Wynika to bezpośrednio z faktu, że w pracy [39] dowiedziono, że dla grafu G ze spójnym i dwudzielnym podgrafem problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ jest rozwiązywalny w czasie co najwyżej kwadratowym dla dowolnego $k \leq \lambda + 2$ oraz z poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 4.5 (Janczewski, Turowski, [32]). *Niech* G *będzie grafem podkubicznym, a* H *jego spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym. Wówczas zachodzi* $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 3$.

Jednocześnie, dowód tego twierdzenia zawiera algorytm zwracający λ-szkieletowe $(\lambda + 3)$-pokolorowanie grafu podkubicznego G ze spójnym i dwudzielnym szkieletem H, działający w czasie $O(n^2)$.

Sednem dowodu twierdzenia 4.5 jest algorytm 2, wyznaczający zbiory A i B w taki sposób, że zbiór A jest niezależny, po usunięciu zbioru A z grafu $G \setminus H$ otrzymujemy graf dwudzielnym o partycjach U_1 i U_2 takich, że $B \subseteq U_1$. W rezultacie, uwzględniając, że również szkielet H jest dwudzielny i ma jednoznaczny podział na partycje V_1 i V_2, można przydzielić kolejno zbiorom $V_1 \cap U_1$, $V_1 \cap U_2$, $V_1 \cap A$, $V_2 \cap A$, $V_2 \cap U_2$, $V_2 \cap U_1$ kolory 1, 2, 3, $\lambda + 1$, $\lambda + 2$, $\lambda + 3$.

W algorytmie tym wykorzystywana jest relacja $R \subseteq V^2(G)$, zdefiniowana następująco: uRv wtedy i tylko wtedy, gdy u i v należą do pewnych (być może różnych) cykli nieparzystych w $G \setminus H$, natomiast ich unikalni sąsiedzi w H są połączeni w grafie $G \setminus H$ ścieżką o nieparzystej długości.

Algorytm 2 Algorytm pomocniczy dla λ-szkieletowego kolorowania grafu podkubicznego G ze spójnym i dwudzielnym szkieletem spinającym H)

$\mathcal{C} \leftarrow \{C\colon C$ jest nieparzystym cyklem w $G \setminus H\}$, $A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$
for all $C \in \mathcal{C}$ **do**
    $f(C) \leftarrow V(C)$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
    Niech $C_0 \in \mathcal{C}$ będzie cyklem o minimalnej wartości $|f(C)|$
    Niech u będzie dowolnym wierzchołkiem z $f(C_0)$
    if istnieje v taki, że uRv oraz $v \notin V(C_0)$ **then**
        Niech C_1 będzie nieparzystym cyklem w $G \setminus H$ zawierającym v
        if $C_1 \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$ **then**
            Usuń v z $f(C_1)$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$, $A \leftarrow A \cup \{u\}$, $B \leftarrow B \cup \{h(u)\}$

Ostatecznie, możliwa jest konstrukcja algorytmu wyznaczającego optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G o maksymalnym stopniu Δ ze szkieletem H dla wszystkich $\Delta \leq 3$. Z drugiej strony okazuje się, że już dla grafów stopnia co najmniej 4 problem kolorowania szkieletowego staje się znacznie trudniejszy:

Twierdzenie 4.6 (Janczewski, Turowski, [32])**.** *Dla każdego ustalonego $\Delta \geq 4$ oraz $\lambda \geq 2$ problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, G) \leq 2\lambda + 1$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny dla grafów G o maksymalnym stopniu Δ.*

Twierdzenie 4.7 (Janczewski, Turowski, [32])**.** *Dla każdego ustalonego $\Delta \geq 5$ oraz $\lambda \geq 4$ problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, T) \leq \lambda + 3$, jest $\mathcal{NP}$-zupełny dla grafów G o maksymalnym stopniu Δ z drzewem spinającym T w szkielecie.*

W dowodach obu twierdzeń wykorzystano znajomość $\mathcal{NP}$-zupełności problemu 3-kolorowania grafów o ustalonym maksymalnym stopniu $\Delta(G) \geq 4$ [20].

Rozdział 5

Kolorowanie szkieletowe split grafów

W pracy [43] badane są split grafy, wprowadzone przez Hammera i Földesa w [26]:

Definicja 5.1. Graf G jest *split grafem* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $V(G) = C \cup I$, $C \cap I = \emptyset$ taki, że zbiór C indukuje w grafie G maksymalną klikę, natomiast I jest zbiorem niezależnym.

Split grafy są podklasą grafów doskonałych, zatem spełniają równość $\chi(G) = \omega(G)$. W dalszej części tego rozdziału rozpatrywane będą tylko split grafy o liczbie chromatycznej $\chi(G) \geq 3$, ponieważ w pozostałych sytuacjach graf G jest pusty lub dwudzielny – a zatem wiadomo np. z [29], że możliwe jest znalezienie optymalnego pokolorowania w czasie wielomianowym.

W literaturze znane było następujące ogólne ograniczenie dla split grafów ze skojarzeniem w szkielecie:

Twierdzenie 5.1 (Broersma et al., [9])**.** *Jeśli G jest split grafem a M skojarzeniem i podgrafem G, to*

$$BBC_\lambda(G, M) \leq \begin{cases} 1+\lambda & \textit{dla } \chi(G)=2 \\ 1+\chi(G) & \textit{dla } \chi(G) \geq 4 \textit{ i } \lambda \leq \min\{\frac{\chi(G)}{2}, \frac{\chi(G)+5}{3}\} \\ 2+\chi(G) & \textit{dla } \chi(G)=9 \textit{ lub } \chi(G) \geq 11, \frac{\chi(G)+6}{3} \leq \lambda \leq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil \\ \frac{\chi(G)}{2}+\lambda & \textit{dla } \chi(G)=3,\ 5,\ 7 \textit{ i } \lambda \geq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil \\ \frac{\chi(G)}{2}+\lambda+1 & \textit{dla } \chi(G)=4,\ 6,\ \chi(G) \geq 7,\ \lambda \geq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil + 1 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC_\lambda(G, M) \leq \chi(G)+1$.

Dla problemu kolorowania szkieletowego split grafów ze skojarzeniem w szkielecie istnieje prosty algorytm 1-bezwzględnie przybliżony:

Twierdzenie 5.2 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem, a M skojarzeniem, będącym podgrafem spinającym G. Wówczas szkieletowe $(\chi(G)+1)$–pokolorowanie grafu G ze szkieletem M można zawsze wyznaczyć w czasie $O(n^2)$.*

Niestety, pokolorowanie szkieletowe wyznaczone według powyższego twierdzenia nie jest optymalne we wszystkich przypadkach. W celu znalezienia algorytmu optymalnego, w [43] najpierw rozważane są tylko split grafy spełniające warunek $|C| = |I| = k$ oraz takie, dla których skojarzenie M jest doskonałe, tj. każdy wierzchołek grafu G jest incydentny z krawędzią szkieletu M. Dla dalszych rozważań przydatne okazują się wprowadzone w tej pracy pojęcia *digrafu konfliktów*, *quasi-lasu* oraz *szkieletu digrafu*.

Definicja 5.2. Digraf G' jest *digrafem konfliktów* split grafu G ze szkieletem M wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1. $V(G') = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$,
2. $E(G') = \{(w_i, w_j)\colon u_i v_j \notin E(G) \wedge 1 \leq i, j \leq k \wedge u_i \in I \wedge v_j \in C\}$.

Definicja 5.3. Digraf G jest *quasi-lasem* wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{outdeg}(v) = 1$ dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$.

Definicja 5.4. Graf G' jest *szkieletem* (*underlying graph*) digrafu G wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G') = V(G)$ oraz $E(G') = \{uv : (u, v) \in E(G)\}$.

Niestety, z uwagi na zbieżność terminologiczną w języku polskim odpowiedników terminów *underlying graph* oraz *backbone*, należy zachować szczególną ostrożność w operowaniu ww. terminami: gdy graf jest szkieletem digrafu, to używamy terminu „szkielet” w pierwszym znaczeniu, gdy szkieletem innego grafu (prostego) – w drugim.

Jeśli F' jest szkieletem quasi-lasu F, to z definicji wynika, że składowymi spójności F' mogą być tylko grafy rzadkie: drzewa oraz grafy unicykliczne. Okazuje się, że problem kolorowania grafów szkieletowych ze skojarzeniem w szkielecie można dzięki tak zdefiniowanym pojęciom sprowadzić do problemu kolorowania grafów pełnych z rzadkimi podgrafami w szkielecie:

Twierdzenie 5.3 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem o $|C| = |I| = k$, a M podgrafem spinającym G, będącym doskonałym skojarzeniem. Jeśli D jest digrafem konfliktów dla G ze szkieletem M, to istnieje taki szkielet F' pewnego quasi-lasu F, będącego podgrafem spinającym D, że $BBC(G, M) = BBC(K_k, F')$.*

W przypadku, gdy rozmiar quasi-lasu jest duży, można wyznaczyć szkieletową liczbę chromatyczną (a także optymalne pokolorowanie szkieletowe) jego szkieletu na mocy poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 5.4 (Turowski, [43]). *Niech G będzie grafem rzędu $n \geq 5$. Jeśli dla każdej składowej spójności G' grafu G zachodzi nierówność $|E(G')| \leq |V(G')|$, to wówczas*

$$BBC(K_n, G) = \begin{cases} n+1 & \textit{jeśli } G \textit{ zawiera gwiazdę jako podgraf spinający,} \\ n & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wiadomo ponadto, że w przypadku małych grafów ($n < 5$) możemy otrzymać optymalne pokolorowanie szkieletowe grafu K_n ze szkieletem G w czasie $O(1)$ rozpatrując wszystkie możliwości (z dokładnością do izomorfizmu).

Ostatecznie, optymalne pokolorowanie szkieletowe przypadku bazowego można wyznaczyć wykonując algorytm 3, przekształcający – o ile to możliwe – początkowy, losowo wybrany quasi-las w taki, który spełnia warunki twierdzenia 5.4, tj. nie zawiera gwiazdy jako podgrafu spinającego.

Twierdzenie 5.5 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem rzędu $2k$ takim, że maksymalna klika C oraz zbiór niezależny I są rozmiaru k. Ponadto, niech M będzie podgrafem G, będącym doskonałym skojarzeniem. Wówczas:*

- *dla $k < 5$ algorytm 3 zwraca optymalne pokolorowanie grafu G ze skojarzeniem M w szkielecie,*
- *jeśli $k \geq 5$ i istnieje szkielet F' dla pewnego spinającego quasi-lasu F w digrafie konfliktów taki, że $BBC(K_k, F') = k$, to algorytm 3 zwraca szkieletowe k-pokolorowanie grafu G ze szkieletem M,*
- *w pozostałych przypadkach $BBC(G, M) = k+1$ i algorytm 3 zwraca szkieletowe $(k+1)$-pokolorowanie grafu G ze szkieletem M.*

Z analizy czasu działania algorytmu 3 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.6 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem rzędu $2k$ takim, że maksymalna klika C oraz zbiór niezależny I są rozmiaru k. Ponadto, niech M będzie podgrafem G, będącym doskonałym skojarzeniem. Wówczas $BBC(G, M)$ można obliczyć w czasie $O(k^3)$.*

Na koniec zostało podane uogólnienie twierdzenia 5.6, uzupełniające jego dowód o rozważanie trzech typów wierzchołków, mogących pojawić się w przypadku ogól-

Algorytm 3 Algorytm optymalnego kolorowania grafu G z doskonałym skojarzeniem M w szkielecie – gdy $|C| = |I| = k$

Utwórz digraf konfliktów D grafu G ze szkieletem M oraz zdefiniuj pusty digraf F na wierzchołkach $w_1, w_2, \ldots, w_k$
if $k < 5$ **then**
  Wyznacz pokolorowanie szkieletowe c, odpowiadające minimalnej wartości $BBC(K_k, F')$ wśród wszystkich szkieletów F' quasi-lasów F, będących podgrafami D
  return pokolorowanie grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.3
for all w_i, $1 \leq i \leq k$ **do**
  if outdeg$(w_i) > 0$ **then**
    Dodaj dowolną krawędź wychodzącą z w_i do F
if szkielet F' quasi-lasu F jest gwiazdą **then**
  if istnieje dopuszczalna krawędź $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
    Zamień w F krawędź wychodzącą z w_i na (w_i, w_j)
  else
    return $(k+1)$-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.2
if szkielet F' quasi-lasu F jest gwiazdą z dodatkową krawędzią **then**
  if istnieje dopuszczalna krawędź $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
    Zamień w F krawędź wychodzącą z w_i na (w_i, w_j)
  else
    return $(k+1)$-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.2
Wyznacz optymalne pokolorowanie szkieletowe c grafu K_k ze szkieletem F' dla quasi-lasu F na podstawie twierdzenia 5.4
return k-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M wyznaczone z c i twierdzenia 5.3

nym: wierzchołków izolowanych z M (zarówno z I, jak i z C) oraz par wierzchołków z C, połączonych krawędzią szkieletową:

Twierdzenie 5.7 (Turowski, [43])**.** *Niech G będzie split grafem, a M skojarzeniem, będącym podgrafem G. Wówczas $BBC(G, M)$ może być obliczone w czasie $O(n^3)$.*

Uzupełnieniem tego wyniku są twierdzenia zamieszczone w [41] i [42] rozstrzygające trudność problemu kolorowania szkieletowego dla split grafów z galaktykami lub drzewami w szkielecie wraz z wynikami Broersmy [9] i Salmana [40], podające odpowiednie oszacowania dla tych klas szkieletów.

Twierdzenie 5.8 (Broersma et al., [9])**.** *Jeśli G jest split grafem a S galaktyką oraz* *podgrafem G, to:*

$$BBC_\lambda(G,S) \leq \begin{cases} 1 & dla\ \chi(G) = 1 \\ \chi(G) + \lambda - 1 & dla\ \chi(G) = 2\ lub\ \chi(G) \geq 4\ i\ \lambda \geq 3 \\ \chi(G) + \lambda & dla\ \chi(G) = 3\ i\ \lambda \geq 2\ lub\ \chi(G) \geq 4\ i\ \lambda = 2 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC(G,S) \leq \chi(G) + 2$.

Twierdzenie 5.9 (Turowski, [41])**.** *Jeśli G jest split grafem, a S galaktyką oraz podgrafem spinającym G, to istnieje algorytm 1-bezwzględnie przybliżony dla problemu wyznaczania $BBC(G,S)$.*

Twierdzenie 5.10 (Turowski, [42])**.** *Jeśli G jest split grafem, a S galaktyką oraz podgrafem spinającym G, to problem rozstrzygnięcia, czy $BBC(G,S) \leq \chi(G)$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny.*

Twierdzenie 5.11 (Salman, [40])**.** *Jeśli G jest split grafem, a T drzewem spinającym G, to:*

$$BBC_\lambda(G,T) \leq \begin{cases} 1 & dla\ \chi(G) = 1 \\ 1 + \lambda & dla\ \chi(G) = 2 \\ \chi(G) + \lambda & dla\ \chi(G) \geq 3 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC(G,T) \leq \chi(G) + 2$.

Twierdzenie 5.12 (Turowski, [42])**.** *Jeśli G jest split grafem, a T drzewem spinającym G, to problem rozstrzygnięcia, czy $BBC(G,T) \leq \chi(G)$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny.*

Rozdział 6

Podsumowanie

Na zakończenie przedstawione zostanie podsumowanie uzyskanych wyników oraz podane problemy otwarte wraz z możliwymi kierunkami dalszych badań.

W rozdziale 2 przedstawione zostały ogólne ograniczenia górne i dolne dla λ-szkieletowej liczby chromatycznej. Nowym wynikiem, dowiedzionym w [30] są ograniczenia górne i dolne, wskazujące na asymptotyczną proporcjonalność $BBC_\lambda(G,H)$ oraz $\lambda(\chi(H)-1)$, gdy $\lambda \to \infty$. Jednocześnie, w pracy podano dokładny wzór na wartość λ-szkieletowej liczby chromatycznej w przypadkach, gdy $\lambda > n(G) - \chi(H)$. Wkładem autora było natomiast opracowanie liniowego algorytmu 2-przybliżonego dla grafów pełnych z dwudzielnym i spójnym szkieletem (1.5-przybliżonego w przypadku, gdy szkielet jest spójny) oraz kwadratowego algorytmu, wyznaczającego optymalną liczbę bichromatyczną dla grafów pełnych z drzewem spinającym w szkielecie. Ten drugi algorytm umożliwia bezpośrednie wyznaczenie optymalnego λ-szkieletowego pokolorowania dla grafów pełnych z drzewem spinającym w szkielecie w przypadku, gdy parametr λ jest mniejszy od rozmiaru mniejszej partycji szkieletu lub gdy jest większy od $n-2$ (dla n oznaczającego rząd grafu pełnego i szkieletu).

Następny rozdział zawierał, za [31], kompletną klasyfikację złożoności problemu wyznaczania $BBC_\lambda(G,H)$ dla grafów planarnych ze spójnym szkieletem spinającym oraz niemal kompletną klasyfikację złożoności problemu wyznaczania $BBC_\lambda(G,T)$ dla grafów planarnych z drzewem spinającym w szkielecie. Ponadto, autor zaproponował w [31] górne ograniczenia wartości λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla kaktusów oraz grafów kolczastych ze spójnymi i dwudzielnymi szkieletami wraz z uzasadnieniem faktu, że podane ograniczenia są ścisłe. Na podstawie powyższych twierdzeń zaprojektował również algorytm dokładny dla problemu λ-szkieletowego kolorowania kaktusów oraz 1-bezwzględnie przybliżony dla zagadnienia λ-

szkieletowego kolorowania grafów kolczastych.

W rozdziale 4 opisane zostało λ-szkieletowe kolorowanie grafów o ograniczonym stopniu, bazujące na [32]. W tym artykule wkładem autora było dowiedzenie istnienia λ-szkieletowego $(\lambda + 3)$-pokolorowania dla każdego grafu podkubicznego ze spójnym szkieletem spinającym, a w szczególności opracowanie kwadratowego algorytmu rozstrzygającego problem dla 3-barwnych grafów podkubicznych z dwudzielnym, spójnym i spinającym szkieletem. Ten wynik został uzupełniony dowodami $\mathcal{NP}$-trudności problemów wyznaczania λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla grafów o stopniu 4 z dowolnym szkieletem oraz dla grafów stopnia 5 z drzewem spinającym w szkielecie.

Rozdział 5 zawiera zaproponowane przez autora w [43] rozwiązanie problemu wyznaczania optymalnego pokolorowania szkieletowego split grafów ze skojarzeniami w szkielecie za pomocą algorytmu działającego w czasie $O(n^3)$. Dodatkowo, rozstrzygany jest problem kolorowania szkieletowego dla drzew oraz grafów unicyklicznych. Jednocześnie, jak wynika z prac autora [41,42], mimo że problemy kolorowania szkieletowego split grafów z galaktykami spinającymi lub drzewami spinającymi w szkielecie są prostymi uogólnieniami powyższego problemu i istnieją dobrze znane w literaturze algorytmy bezwzględnie przybliżone do obliczania wartości $BBC_\lambda(G, H)$, to jednak jej dokładne wyznaczenie jest problemem $\mathcal{NP}$-trudnym.

W niniejszej pracy dla pewnych problemów zostały przedstawione jedynie częściowe rozwiązania. Wydaje się, że najważniejszą rangę należy przypisać problemowi uzupełnienia wyników dotyczących złożoności obliczeniowej problemu obliczania λ-szkieletowej liczba chromatycznej dla grafów planarnych z drzewami spinającymi w szkielecie. Jednocześnie, należy zaznaczyć, że rozwiązanie tego problemu zdaje się być powiązane z postawioną przez Broersmę w [7] hipotezą, że zachodzi $BBC_2(G, T) \leq 6$ dla każdego grafu planarnego G z drzewem spinającym T w szkielecie. Ważnym problemem otwartym jest również rozstrzygnięcie statusu zagadnienia wyznaczania λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla grafów pełnych z drzewami spinającymi w szkielecie. Ponadto, nadal nie jest również znana złożoność obliczeniowa problemu λ-szkieletowego kolorowania kaktusów z dwudzielnym i spójnym szkieletem oraz split grafów ze skojarzeniem w szkielecie dla parametru $\lambda > 2$.

Innym kierunkiem badań mogłoby być podejście badające jakość algorytmów, zarówno w aspekcie praktycznym – ich implementacji dla grafów małych i losowych – ale również pod względem oszacowań teoretycznych. W szczególności, ciekawym kierunkiem wydaje się badanie algorytmów opartych o strategie zachłanne, gdyż znany jest fakt, zgodnie z którym dla każdego grafu i szkieletu istnieje sekwencja wierzchołków, której zachłanne pokolorowanie zwraca wynik optymalny. Dokładniejsza analiza tych zagadnień mogłaby być wartościowym uzupełnieniem rozważań asymptotycznych, bądź też ograniczonych jedynie do szczególnych klas grafów lub szkieletów.

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań, mimo że systemy, z których wywodzi się ten model, są wypierane przez systemy trzeciej i czwartej generacji, to jednak istnieją przykłady sieci zgodnych z przyjętymi założeniami, rozbudowywanych obecnie również w Polsce. Ważnym przykładem są sieci TETRA (*Terrestrial Trunked Radio*), mające na celu zapewnienie skoordynowanego i niezakłóconego funkcjonowania oraz współpracy służb publicznych, w szczególności policji, pogotowia ratunkowego oraz straży pożarnej. Sieci tego typu można przedstawić jako sześciokąty umieszczone na płaszczyźnie, odpowiadające pojedynczym stacjom bazowym, którym należy przydzielić pasma w taki sposób, aby sąsiednie obszary otrzymały częstotliwości odpowiednio odseparowane od siebie. Typowo, problem przydziału częstotliwości w sieciach TETRA rozwiązuje się dzieląc teren na identyczne podobszary i rozwiązując odpowiedni podproblem, a następnie powielając to rozwiązanie na pozostałych, natomiast podejście algorytmiczne mogłoby umożliwiać rozwiązania dokładniejsze.

Bibliografia

[1] S. Arora, B. Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach.* Cambridge University Press, 2009.

[2] H. L. Bodlaender, H. Broersma, F. V. Fomin, A. V. Pyatkin, G. J. Woeginger. Radio labeling with pre-assigned frequencies. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2002)*, vol. 2461, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 211–222, 2002.

[3] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan, J. van Leeuwen. λ-coloring of graphs. W: *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2000)*, vol. 1770, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 395–406, 2000.

[4] B. Bollobás. *Graph Theory: An Introductory Course*, vol. 63, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1979.

[5] B. Bollobás, A. J. Harris. List colourings of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1:115–127, 1985.

[6] H. J. Broersma. A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. W: *Combinatorial Geometry and Graph Theory*, s. 65–79. Springer, 2003.

[7] H. J. Broersma, F. V. Fomin, P. A. Golovach, G. J. Woeginger. Backbone colorings for graphs: tree and path backbones. *Journal of Graph Theory*, 55(2):137–152, 2007.

[8] H. J. Broersma, B. Marchal, D. Paulusma, A. N. M. Salman. Improved upper bounds for λ-backbone colorings along matchings and stars. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science, 33rd Conference on Current*

Trends in Theory and Practice of Computer Science, Harrachov, Czech Republic, January 20-26, 2007, Proceedings, vol. 4362, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 188–199, 2007.

[9] H. J. Broersma, B. Marchal, D. Paulusma, A. N. M. Salman. Backbone colorings along stars and matchings in split graphs: their span is close to the chromatic number. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(1):143–162, 2009.

[10] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194–197, 1941.

[11] Y. Bu, S. Finbow, D. Der-Fen Liu, X. Zhu. List backbone colouring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 167:45–51, 2014.

[12] Y. Bu, Y. Li. Backbone coloring of planar graphs without special circles. *Theoretical Computer Science*, 412(46):6464–6468, 2011.

[13] T. Calamoneri. The $L(h, k)$-labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. *The Computer Journal*, 54(8):1344–1371, 2011.

[14] V. Campos, F. Havet, R. Menezes Sampaio, A. Silva. Backbone colouring: Tree backbones with small diameter in planar graphs. *Theoretical Computer Science*, 487:50–64, 2013.

[15] G. J. Chang, D. Kuo. The $L(2, 1)$-labeling problem on graphs. *SIAM Jorunal of Discrete Mathematics*, 9:309–316, 1996.

[16] M. B. Cozzens, F. S. Roberts. T-colorings of graphs and the channel assignment problem. *Congressium Numerantium*, 35:191–208, 1982.

[17] R. Diestel. *Graph Theory*, vol. 173, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[18] J. Fiala, J. Kratochvíl, A. Proskurowski. Distance constrained labeling of precolored trees. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *Proceedings of the 7th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS '01)*, vol. 2202, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 285–292, 2001.

[19] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$-Completeness*. W. H. Freeman & Co., 1979.

[20] M. R. Garey, D. S. Johnson, L. Stockmeyer. Some simplified $\mathcal{NP}$-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1(3):237–267, 1976.

[21] K. Giaro, R. Janczewski, M. Małafiejski. Polynomial algorithm for finding T-span of generalized cacti. *Discrete Applied Mathematics*, 129:371–382, 2003.

[22] K. Giaro, R. Janczewski, M. Małafiejski. The complexity of the T-coloring problem for graphs with small degree. *Discrete Applied Mathematics*, 129(2–3):361–369, 2003.

[23] J. R. Griggs, R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Jorunal of Discrete Mathematics*, 5:586–595, 1992.

[24] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Algorithms and Combinatorics. Springer, 1988.

[25] W. K. Hale. Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 68:1497–1514, 1980.

[26] P. L. Hammer, S. Földes. Split graphs. *Congressum Numerantium*, 19:311–315, 1977.

[27] F. Harary, G. Uhlenbeck. On the number of Husimi trees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(4):315–322, 1953.

[28] F. Havet, A. D. King. List circular backbone colouring. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16(1):89–104, 2014.

[29] F. Havet, A. D. King, M. Liedloff, I. Todinca. (Circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 169:119–134, 2014.

[30] R. Janczewski, K. Turowski. The backbone coloring problem for bipartite backbones. *Graphs and Combinatorics*, 2014. Przyjęte do druku.

[31] R. Janczewski, K. Turowski. The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones. *Discrete Applied Mathematics*, 2014. Przyjęte do druku.

[32] R. Janczewski, K. Turowski. The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones. *Information Processing Letters*, 115:232–236, 2015.

[33] R. Janczewski, K. Turowski. An $O(n \log n)$ algorithm for finding edge span of cacti. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2015. Przyjęte do druku.

[34] T. R. Jensen, B. Toft. *Graph Coloring Problems.* Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 1995.

[35] M. Kubale (red.). *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, 2002.

[36] B. H. Metzger. Spectrum management technique. Paper presented at the 38th National ORSA Meeting, Detroit, MI, 1970.

[37] C. H. Papadimitriou. *Złożoność obliczeniowa.* Klasyka Informatyki. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, 2007.

[38] F. S. Roberts. T-colorings of graphs: recent results and open problems. *Discrete Mathematics*, 93(2–3):229–245, 1991.

[39] A. N. M. Salman. *Contributions to Graph Theory.* PhD thesis, University of Twente, 2005.

[40] A. N. M. Salman. λ-backbone coloring numbers of split graphs with tree backbones, 2006.

[41] K. Turowski. A note on fast approximate backbone coloring of split graphs with star–like backbones. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 1(1):15–20, 2011.

[42] K. Turowski. On optimal backbone coloring of split and threshold graphs with pairwise disjoint stars. W: *Proceedings of 5th International Interdisciplinary Technical Conference of Young Scientists InterTech 2012, Poznań, 16-18.05.2012*, s. 271–274, 2012.

[43] K. Turowski. Optimal coloring of split graphs with matching backbone. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 35(1):157–169, 2015.

[44] R. J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007.

[45] R. K. Yeh. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discrete Mathematics*, 306:1217–1231, 2006.

[46] D. Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number. *Theory of Computing*, 3:103–128, 2007.